TENTAMEN DISCRETE STRUCTUREN

2-7-2012

*Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld.* ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

---

**Opgave 1.** (10 pt) Gegeven is een universele verzameling $U$.

**a.** Gebruik de verzamelingenalgebra om te bewijzen dat voor elk tweetal deelverzamelingen $A, B$ van $U$ geldt: $\overline{(A \cup \overline{B})} \cap \overline{(\overline{A} \cup B)} = \varnothing$. Benoem de gebruikte regels.

**b.** Met $P(A)$ duiden we de machtsverzameling van een verzameling $A$ aan.
Stel $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Geef de verzameling $A$.

**Opgave 2.** (10 pt) Bewijs met volledige inductie dat $33^n - 1$ deelbaar is door 32 voor alle gehele getallen $n \geqslant 1$.

**Opgave 3.** (10 pt) Los de volgende recurrente betrekking op: $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2},\ a_1 = 5, a_2 = 11, n \in \mathbb{Z}^+$.

**Opgave 4.** (10 pt) Gegeven zijn de verzamelingen $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De (totale) functie $f : A \to B$ is gedefinieerd als:

$$f((a,b)) = (a+b, a-b), \qquad (a,b) \in A.$$

Bewijs dat $f$ zowel injectief als surjectief is.

**Opgave 5.** (15 pt) $R$ is een relatie op de verzameling $A = \{1,2,3,4\}$, gedefinieerd door de bijbehorende matrix:

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**a.** Teken de graaf van $R$.
**b.** Is de relatie $R$ een functie?
**c.** Is $R$ reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch?
**d.** Geef de matrix behorende bij de relatie $R \circ R$.
**e.** Is $R$ een partiële ordening?
**f.** Stel $S$ is een relatie op $A$ met $R \subseteq S$. Kan $S$ een partiële ordening zijn? Kan $S$ een equivalentierelatie zijn?

**Opgave 6.** (5 pt) Gegeven is een verzameling $S$.

**a.** De machtsverzameling $P(S)$, met $\subseteq$ als partiële ordening, is een tralie (Engels: lattice). Leg uit waarom.
**b.** Stel $T$ is een deelverzameling van $S$. Bewijs dat $P(T)$ een deeltralie (Engels: sublattice) van $P(S)$ is.

**Opgave 7.** (10 pt)

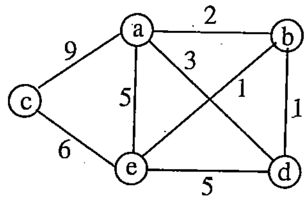
| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**a.** Geef de Boolese expressie $f(x,y,z)$ die correspondeert met de waarheidstabel van de functie $f : B_3 \to B$ hiernaast.
**b.** Gebruik de regels van de Boolese algebra om de expressie $f$ te herschrijven zodat een minimaal aantal variabelen en operaties wordt gebruikt.
**c.** Teken het logische diagram van de nieuwe expressie.

(*Verder op de volgende pagina*)

**Opgave 8.** (10 pt)
Gegeven is een ongerichte graaf $G$ van een symmetrische samenhangende relatie $R$ op een verzameling $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ met $n$ elementen, waarbij $n \geqslant 2$. Verder is gegeven dat $R$ transitief is. Bewijs dat er in de graaf $G$ een kant bestaat van elke knoop naar zichzelf, d.w.z. dat $R$ reflexief is.

**Opgave 9.** (10 pt)




**Figuur 1**: De graaf $G_5$.

**a.** Beschrijf kort de werking van het algoritme van Kruskal voor het bepalen van een minimale opspannende boom van een ongerichte gewogen graaf $G$ van een eindige samenhangende symmetrische relatie.
**b.** Bepaal een minimale opspannende boom volgens het algoritme van Kruskal van de graaf $G_5$ in de figuur hierboven (de geheeltallige gewichten van de kanten zijn aangegeven), en teken deze boom. Geef ook aan in welke volgorde de kanten van de minimale opspannende boom door dit algoritme worden opgeleverd.
**c.** Neem nu aan dat een bepaalde kant van een graaf $G$ moet voorkomen in een minimale opspannende boom van $G$. Hoe moet Kruskal's algoritme worden aangepast om dit te bereiken?

**Opgave 10.** (10 pt)
Bekijk nogmaals de graaf $G_5$ uit de figuur van opgave 9.

**a.** Heeft $G_5$ een Euler circuit? En een Euler pad? Geef zo'n circuit, respectievelijk pad (als het bestaat).
**b.** Heeft $G_5$ een Hamilton circuit? En een Hamilton pad? Geef zo'n circuit, respectievelijk pad (als het bestaat).
**c.** Geef een correcte ("proper") kleuring van de graaf $G_5$ met een minimaal aantal kleuren.